

14 octobre 2025

## Corrigé 5

**Exercice 1.** Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $B = \{f_1, \dots, f_m\}$  une base. Démontrer que  $V = \text{Vect}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(f_m)$ .

**Solution 1.** Comme chaque vecteur  $v \in V$  est une combinaison linéaire des vecteurs dans  $B$ , on a que  $V \subset \text{Vect}(f_1) + \dots + \text{Vect}(f_m) \subset V$ , et donc  $V = \text{Vect}(f_1) + \dots + \text{Vect}(f_m)$ .

Il reste à montrer que la somme est directe. On suppose que  $v \in \text{Vect}(f_i) \cap \sum_{j \neq i} \text{Vect}(f_j)$ . Donc  $v = \lambda_i f_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j$ , pour certains  $\lambda_r \in K$ . Par conséquent,  $\lambda_i f_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j = 0$ . Comme  $B$  est une base, tous les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont nuls. Donc  $v = \lambda_i f_i = 0$ , et l'intersection  $\text{Vect}(f_i) \cap \sum_{j \neq i} \text{Vect}(f_j)$  se réduit au vecteur nul et  $V = \text{Vect}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(f_m)$ , par définition de la somme directe.

**Exercice 2.**

- (i) Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{C}$  les 3 vecteurs du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (a, 1, 1), \quad v_2 = (i, a - 1, 1) \quad \text{et} \quad v_3 = (0, 0, a^2)$$

forment-ils une base de  $\mathbb{C}^3$ ?

- (ii) Pour  $a = 2 - i$ ,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base. Exprimer le vecteur  $(1 - i, 3, 1 + i)$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ ; c'est-à-dire, trouver les coordonnées du vecteur  $(1 - i, 3, 1 + i)$  par rapport à cette base.

**Solution 2.**

- (i) On peut supposer  $a \neq 0$ , car dans le cas contraire  $v_3 = (0, 0, 0)$ , qui ne peut pas faire partie d'une base. Pour  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  on a

$$\lambda(a, 1, 1) + \mu(i, a - 1, 1) + \nu(0, 0, a^2) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \lambda a + \mu i = 0 \\ \lambda + \mu(a - 1) = 0 \\ \lambda + \mu + \nu a^2 = 0. \end{cases}$$

Multipliant la deuxième équation par  $a$  et soustrayant la première, on trouve  $\mu(a^2 - a - i) = 0$ .

L'équation  $x^2 - x - i = 0$  admet les solutions  $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2}$ . On étudie donc deux cas:

Cas 1)  $a \notin \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2} \right\}$ . Alors  $\mu(a^2 - a - i) = 0$  implique  $\mu = 0$  et il s'ensuit que  $\lambda = 0$  et puis  $\nu = 0$ . Dans ce cas la partie  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est donc libre. Comme  $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ , les trois vecteurs forment une base de  $\mathbb{C}^3$ .

Cas 2)  $a \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2} \right\}$ . Alors les deux premières équations donnent  $\lambda = \mu(1 - a) = \frac{-\mu i}{a}$ . En

remplaçant dans la troisième, on trouve  $\nu = \frac{(a - 2)\mu}{a^2}$ . Maintenant, si on prend  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1 - a$  et  $\gamma = \frac{a - 2}{a^2}$ , on trouve que  $\lambda v_1 + \mu v_2 + \gamma v_3 = 0$  et les vecteurs sont linéairement dépendants.

Conclusion: la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre  $\iff a \notin \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}, 0 \right\}$ .

(ii) Pour  $a = 2 - i$ , la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  devient  $\{(2 - i, 1, 1), (i, 1 - i, 1), (0, 0, 3 - 4i)\}$ . La relation

$$\lambda(2 - i, 1, 1) + \mu(i, 1 - i, 1) + \nu(0, 0, 3 - 4i) = (1 - i, 3, 1 + i)$$

donne le système

$$\begin{cases} \lambda(2 - i) + \mu i & = 1 - i \\ \lambda + \mu(1 - i) & = 3 \\ \lambda + \mu + \nu(3 - 4i) & = 1 + i. \end{cases}$$

Multipliant la deuxième équation par  $(2 - i)$  et soustrayant de la première, on trouve  $\mu(4i - 1) = 2i - 5$ , donc

$$\mu = \frac{-5 + 2i}{-1 + 4i} = \frac{(-5 + 2i)(-1 - 4i)}{17} = \frac{13 + 18i}{17}.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda = 3 - \mu(1 - i) = 3 - \frac{(13 + 18i)(1 - i)}{17} = \frac{20 - 5i}{17}$$

et

$$\nu = \frac{1 + i - (\lambda + \mu)}{3 - 4i} = \frac{1}{3 - 4i} \left( 1 + i - \frac{33 + 13i}{17} \right) = \frac{-16 + 4i}{17(3 - 4i)} = \frac{-64 - 52i}{425}.$$

**Exercice 3.** On considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $X = \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$  :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in X; a - b = c \text{ et } e - f = 0 \right\},$$

$$V = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Calculer  $\dim(U)$  et  $\dim(V)$ .

(ii) Trouver  $\dim(U \cap V)$ .

(iii) Déterminer si  $U + V = \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ .

**Solution 3.**

(i) Une matrice  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  appartient à  $U$  si et seulement si  $f = e$  et  $a = b + c$ . Donc  $U$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} b+c & b & c \\ d & e & e \end{pmatrix}$ . Une telle matrice s'écrit comme la combinaison linéaire

$$b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une famille génératrice de  $U$ .

On vérifie que  $S$  est une famille libre et donc  $\dim U = 4$ .

Pour  $V$ , il s'agit d'extraire une base de la famille génératrice donnée.

On cherche d'abord à savoir si les vecteurs donnés sont linéairement indépendants. Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta(i+1) + \delta(2+i) &= 0; & i\alpha + \beta + \gamma + \delta(2+i) &= 0; \\ \gamma + \delta &= 0; & \text{et } \alpha + \delta &= 0. \end{aligned}$$

On déduit que  $\gamma = \alpha$ ,  $\delta = -\alpha$ , et  $\beta = \alpha$ . Les équations sont alors toutes vérifiées en prenant  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  et  $\delta = -1$ . Les vecteurs sont linéairement dépendants et de plus on voit que le 4<sup>e</sup> vecteur est la somme des 3 premiers. Donc

$$V = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ensuite, on vérifie que les trois matrices restantes sont linéairement indépendantes et par conséquent  $\dim V = 3$ .

(ii) Soit  $A = \begin{pmatrix} b+c & b & c \\ d & e & e \end{pmatrix} \in U$ . Alors  $A \in V$  si et seulement s'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  tels que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est possible seulement si  $e = 0$ , ce qui implique  $\alpha = 0$  (comparer les composantes (2, 3) et (2, 2) des deux matrices), et ensuite  $b = 0$  (voir la composante (2, 2)). On a maintenant

$$\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(i+1) & 0 & \beta + \gamma \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on déduit que  $\beta = \frac{1-i}{2}c$  et  $\gamma = d = \frac{1+i}{2}c$ . On vérifie ainsi que  $U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ \frac{1+i}{2}c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}$ .

On a  $\dim(U \cap V) = 1$ .

(iii) Par la formule pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, on a que  $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 4 + 3 - 1 = 6$  et comme  $\dim M_{2 \times 3}(\mathbb{C}) = 6$ , on déduit que  $U + V = M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ .

**Exercice 4.** Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver une base et donner la dimension.

(i) Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $T$  des matrices  $A = (a_{rs})_{1 \leq r, s \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  telles que  $a_{rs} = i \cdot a_{sr}$  pour tous  $r \leq s$ ,

(ii) Le  $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel  $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{F}_7)^3 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } 3y + z = 0\}$ .

#### Solution 4.

- (i) Pour  $1 \leq r, s \leq n$ , notons  $E_{rs}$  la matrice dont le coefficient en position  $(r, s)$  vaut 1 et zéro partout ailleurs. On va montrer que la famille

$$\mathcal{B} := \{iE_{jk} + E_{kj} \mid 1 \leq j < k \leq n\}$$

est une base de  $T$ .

D'abord on note que cette famille est contenue dans  $T$ : soit  $j < k$  et  $1 \leq r \leq n$  et  $1 \leq s \leq n$ .

$(iE_{jk} + E_{kj})_{rs} = i$  si  $(r, s) = (j, k)$ , et  $(iE_{jk} + E_{kj})_{rs} = 1$  si  $(r, s) = (k, j)$ , et toutes autres composantes de la matrice est égale à 0. Donc cette matrice appartient à  $T$ . Supposons qu'il existe des scalaires  $\alpha_{jk}$ ,  $1 \leq j < k \leq n$ , tels que

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk}(iE_{jk} + E_{kj}) = 0.$$

Alors comme cette matrice est nulle, tout coefficient de la matrice doit être nul. Pour tous  $1 \leq j < k \leq n$ , on trouve  $i\alpha_{jk} = 0$  en position  $(j, k)$ . Donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre. Pour une matrice  $A = (A_{ij}) \in T$ , on note que  $A_{ii} = 0$  car  $A_{ii} = iA_{ii}$ . Aussi on a

$$A = \sum_{1 \leq j < k \leq n} A_{jk}(iE_{jk} + E_{kj}),$$

car pour tous  $1 \leq j < k \leq n$ ,  $A_{jk} = iA_{kj}$ . Par conséquent, cette famille est génératrice.

On a montré que la famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice dans  $T$ , donc elle est une base de  $T$ .

La dimension de  $T$  est donc  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

- (ii) Soit  $(x, y, z) \in V$ , Alors  $3y + z = 0$  implique que  $z = -3y$  et on remplace  $z$  par  $-3y$  dans  $x + y + 2z = 0$  et on obtient  $x = 5y$ . On obtient donc que  $(x, y, z) = (5y, y, -3y)$  et si on pose  $y = 1$ , on obtient le vecteur  $(5, 1, -3) = (5, 1, 4)$ , puisque  $-3 = 4 \in \mathbb{F}_7$ . On montre que le vecteur  $(5, 1, 4)$  engendre  $V$ . En effet, il est clair que cet élément appartient à  $V$ . Comme on a vu que tout élément  $(x, y, z)$  vérifie  $(x, y, z) = (5y, y, 4y) = y(5, 1, 4)$ , ce vecteur non nul engendre  $V$ . On a montré que  $\{(5, 1, 4)\}$  est une base de  $V$  et donc  $V$  est de dimension 1.

#### Exercice 5.

- (i) Une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  est dite scalaire s'il existe  $d \in \mathbb{C}$  tel que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ d & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble  $V$  des matrices scalaires est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

- (ii) On définit la trace d'une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  par  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Montrer que l'ensemble  $W$  des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .
- (iii) Montrer que  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) = V \oplus W$ .
- (iv) Trouver une base de  $V$  et une base de  $W$ .
- (v) Déterminer les dimensions de  $V, W$  et de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

- (vi) Considérons maintenant l'espace vectoriel  $M_3(\mathbb{F}_3)$  et posons  $V$  le sous-espace vectoriel des matrices scalaires dans  $M_3(\mathbb{F}_3)$  et  $W$  le sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{F}_3)$  des matrices à traces nulles. (On admet que ces deux sous-ensembles sont des sous-espaces. Les preuves données pour (a) et (b) ne dépendent pas du corps  $\mathbb{C}$ .) Montrer que  $M_3(\mathbb{F}_3) \neq V \oplus W$ .

**Solution 5.**

- (i) Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux éléments de  $V$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors il existe  $d, d' \in \mathbb{C}$  tels que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d' & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Donc  $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$  et  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$  satisfont

$$\lambda a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda d & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et} \quad a_{ij} + b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d + d' & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Cela implique que  $\lambda \cdot A, A + B \in V$ . Comme  $V$  contient le vecteur nul, l'ensemble  $V$  est par conséquent un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$ .

- (ii) Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux éléments de  $W$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$  et  $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = 0$ . Considérons la trace de la matrice  $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$  et celle de  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ . Donc

$$\text{Tr}(\lambda \cdot A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{Tr}(A) = 0$$

et

$$\text{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) = 0.$$

Cela implique que  $\lambda \cdot A, A + B \in W$ . Comme  $W$  contient le vecteur nul, l'ensemble  $W$  est par conséquent un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  par le critère des sous-espaces.

- (iii) Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ . On définit  $B = \frac{\text{Tr}(A)}{n} \cdot I_n$  et  $C = (c_{ij}) = A - B$ . Evidemment  $B \in V$ , et comme

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} - \frac{\text{Tr}(A)}{n} & \text{si } i = j \end{cases}$$

on a

$$\text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^n \left( a_{ii} - \frac{\text{Tr}(A)}{n} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} - n \times \frac{\text{Tr}(A)}{n} = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(A) = 0$$

et donc  $C \in W$ . On a montré que  $A = B + C$  avec  $B \in V$  et  $C \in W$ , et donc  $M_n(\mathbb{C}) = V + W$ .

On montre maintenant que  $V \cap W = \{0\}$ . Soit  $A = (a_{ij}) \in V \cap W$ . Alors par définition, il existe  $d \in \mathbb{C}$  tel que

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d & \text{si } i = j \end{cases}$$

et  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$ . Mais dans ce cas, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_{ii} = d$  et donc  $\text{Tr}(A) = nd = 0$ . Cela implique que  $d = 0$  et  $A$  est réduit à la matrice nulle. On a montré que  $V \cap W = \{0\}$  et donc  $M_n(\mathbb{C}) = V \oplus W$ .

- (iv) Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , notons  $E_{ij}$  la matrice dont le coefficient en position  $(i, j)$  vaut 1, et zéro partout ailleurs.

Alors on montre que l'ensemble  $\{I_n\}$ , où  $I_n$  est la matrice identité, est une base de  $V$ . C'est évident, puisque  $I_n \in V$  et toute matrice dans  $V$  est de la forme  $d \cdot I_n$ .

On montre que la famille  $\mathcal{A} = \{E_{ij}, E_{kk} - E_{11} \mid 1 \leq i \neq j \leq n, 2 \leq k \leq n\}$  est une base de  $W$ . Premièrement il est clair que la famille  $\mathcal{A}$  est contenue dans  $W$ . Deuxièmement, pour une matrice  $A = (A_{ij}) \in W$ , alors  $\text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} = 0$  et donc  $A_{11} = -A_{22} - \dots - A_{nn}$ . Par conséquent,

$$A = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} A_{ij} E_{ij} + \sum_{k=2}^n A_{kk} (E_{kk} - E_{11}).$$

Donc cette famille est génératrice. Troisièmement, supposons qu'il existe des scalaires  $A_{ij}$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$  et  $A_{kk}$  pour  $2 \leq k \leq n$  tels que

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} A_{ij} E_{ij} + \sum_{k=2}^n A_{kk} (E_{kk} - E_{11}) = 0.$$

Donc les coefficients de cette matrice sont nuls. En position  $(i, j)$  pour  $i \neq j$ , on trouve  $A_{ij} = 0$ , et en position  $(k, k)$  pour  $k \geq 2$ , on trouve  $A_{kk} = 0$ . Cela implique que  $A_{ij} = 0$  pour tous  $1 \leq i \neq j \leq n$  et  $A_{kk} = 0$  pour tout  $2 \leq k \leq n$ . Cela signifie que la famille est libre. Comme cette famille est libre et génératrice, elle est une base de  $W$ .

- (v) D'après d),  $\dim(V) = 1$  et  $\dim(W) = n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$ .

On montre que la famille  $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  est une base de  $M_n(\mathbb{C})$ . En effet, cette famille est génératrice, car pour toute matrice  $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ , on a  $A = \sum_{ij} A_{ij} E_{ij}$ . Cette famille est aussi libre. En effet, supposons qu'il existe des scalaires  $A_{ij}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  tels que  $\sum_{ij} A_{ij} E_{ij} = 0$ , alors les coefficients de cette matrice sont nuls et en position  $(i, j)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on trouve  $A_{ij} = 0$ . Donc tous les scalaires  $A_{ij}$  s'annulent et cette famille est libre. Comme elle est libre et génératrice, elle est une base de  $M_n(\mathbb{C})$ . Donc  $\dim(M_n(\mathbb{C})) = n \times n = n^2$ .

Une autre méthode utilise la formule des dimensions:

$$\dim(M_n(\mathbb{C})) = \dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W) = 1 + (n^2 - 1) = n^2.$$

- (vi) Ici  $V \cap W$  n'est pas  $\{0\}$  car la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V \cap W$ , et donc  $V \subseteq W$ , d'où  $V + W = W \neq M_3(\mathbb{F}_3)$  car par exemple  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ .

**Exercice 6.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 5. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- (i) Si trois éléments  $v_1, v_2, v_3$  de  $V$  sont deux à deux linéairement indépendants, alors les trois vecteurs sont linéairement indépendants.
- (ii) Une partie à 4 éléments est toujours libre.

(iii) Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $\dim(U) = 3$  et  $\dim(W) = 2$ . Si  $V = U + W$ , alors  $U \cap W = \{0\}$ .

(iv) Pour deux sous-espaces vectoriels  $U$  et  $W$  avec  $\dim(U) = 3$  et  $\dim(W) = 3$ , on a  $\dim(U \cap W) = 1$ .

**Solution 6.**

(i) Non. Par exemple, dans  $\mathbb{R}^5$ , on prend  $v_1 = e_1, v_2 = e_2$  et  $v_3 = e_1 + e_2$ . Alors évidemment les trois éléments  $v_1, v_2, v_3$  de  $V$  sont deux à deux linéairement indépendants, mais ces trois vecteurs sont liés, puisque  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ .

(ii) Non. Par exemple, soit  $v \in \mathbb{R}^5$  un élément non nul et prenons la partie  $\{v, 2v, 3v, 4v\}$ . Cette partie n'est pas libre, puisque elle est contenue dans  $\text{Vect}(v)$  qui est un sous-espace de  $\mathbb{R}^5$  de dimension 1.

(iii) Oui. En effet, d'après la formule des dimensions,

$$5 = \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - \dim(U \cap W).$$

Donc  $\dim(U \cap W) = 0$ , et donc  $U \cap W = \{0\}$ .

(iv) Non. Par exemple, si  $U = W$ , alors  $U \cap W = U$  et donc  $\dim(U \cap W) = \dim(U) = 3 \neq 1$ .

---

**Exercice 7.** Les applications suivantes sont-elles linéaires?

(i)  $\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_1(x, y, z) = (x - 4y + 17z, y - z + \sin(z))$ .

(ii)  $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha_2(x, y) = (x + 3y, x^2 + y^2)$ .

(iii)  $\alpha_3 : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2, \alpha_3(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ .

(iv)  $\alpha_4 : \mathcal{C}([0, 3], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_4(f) = 37f(1) + 58 \int_2^3 f(x)dx$ , où  $\mathcal{C}([0, 3], \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 3]$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution 7.**

(i) L'application  $\alpha_1$  n'est pas linéaire, car l'application  $z \mapsto \sin(z)$  ne l'est pas. Par exemple  $\sin(\pi/2) + \sin(\pi/2) = 1 + 1 = 2$ , mais  $\sin(\pi/2 + \pi/2) = \sin(\pi) = 0$ .

(ii) L'application  $\alpha_2$  n'est pas linéaire, car

$$\begin{aligned} \alpha_2((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \alpha_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2) \\ &\neq (x_1 + x_2 + 3(y_1 + y_2), x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = \alpha_2(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) \end{aligned}$$

(iii) L'application  $\alpha_3$  est linéaire, car  $\forall x \in \mathbb{F}_2, x^2 = x$ , donc en fait  $\alpha_3(x, y) = (x + y, x + y)$ . Il est élémentaire de vérifier que cette application est linéaire.

(iv) L'application  $\alpha_4$  est linéaire. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in \mathcal{C}([0, 3], \mathbb{R})$ . Alors

$$\begin{aligned} \alpha_4(\lambda f + \mu g) &= 37(\lambda f + \mu g)(1) + 58 \int_2^3 (\lambda f + \mu g)(x)dx \\ &= 37(\lambda f(1) + \mu g(1)) + 58 \int_2^3 (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \\ &= \lambda(37f(1) + 58 \int_2^3 f(x)dx) + \mu(37g(1) + 58 \int_2^3 g(x)dx) \\ &= \lambda \alpha_4(f) + \mu \alpha_4(g). \end{aligned}$$

**Exercice 8.** Soient  $V$ ,  $W$  et  $U$  des  $K$ -espaces vectoriels et soient  $\phi : V \rightarrow W$ ,  $\psi : V \rightarrow W$  et  $\theta : W \rightarrow U$  des applications  $K$ -linéaires.

- (i) Montrer que  $\phi + \psi$  est une application  $K$ -linéaire.
- (ii) Soit  $\lambda \in K$ . Montrer que  $\lambda\phi$  est une application  $K$ -linéaire.
- (iii) Démontrer que  $\theta \circ \phi$  est une application  $K$ -linéaire.

**Solution 8.**

- (i) Soient  $u, v \in V$  et  $\mu \in K$ . On a  $(\phi + \psi)(\mu u + v) = \phi(\mu u + v) + \psi(\mu u + v)$ . Comme  $\phi$  et  $\psi$  sont  $K$ -linéaires, ce dernier est égal à  $\mu\phi(u) + \phi(v) + \mu\psi(u) + \psi(v) = \mu(\phi + \psi)(u) + (\phi + \psi)(v)$ , ce qui prouve que  $\phi + \psi$  est  $K$ -linéaire.
- (ii) La démonstration est pareille.
- (iii) Soient  $x, y \in V$  et  $\lambda \in K$ . On a  $(\theta \circ \phi)(\lambda x + y) = \theta(\phi(\lambda x + y)) = \theta(\lambda\phi(x) + \phi(y))$ , car  $\phi$  est  $K$ -linéaire. Ensuite, on trouve que  $\theta(\lambda\phi(x) + \phi(y)) = \lambda\theta(\phi(x)) + \theta(\phi(y))$  car  $\theta$  est  $K$ -linéaire. Et cette dernière expression est égale (par la définition de la composition d'applications) à  $\lambda(\theta \circ \phi)(x) + (\theta \circ \phi)(y)$ . Ainsi nous avons établi que  $\theta \circ \phi$  est une application  $K$ -linéaire.